Musterlösung zu Übungsblatt 9

erstellt von Alexander Dimitrov
LaTeX-Vorlage: Jan Stricker

33. *Zufälliger rekursiver Baum nochmal.*

a)

Wir haben eine Grundstruktur gegeben, bei der wir eine Wurzel und 3 Knoten haben, welche Kinder der Wurzel sind. Wir nummerieren diese Knoten mit 1,2 und 3 und die Wurzel mit 0. Es sei Z_i der i-te Knoten, welcher rein zufällig einem der anderen $i+3$ Knoten angehängt wird. Dabei betrachten wir 4 mögliche Ereignisse $E_{0,i}, E_{1,i}, E_{2,i}, E_{3,i}$ für Z_i. $E_{1,i}$ bis $E_{3,i}$ seien die Ereignisse, dass Z_i von Knoten 1,2 oder 3 abstammt und $E_{0,i} = E_{1,i}^c \cap E_{2,i}^c \cap E_{3,i}^c$, was wir auch anders schreiben können als Z_i stammt von der Wurzel ab, ohne von Knoten 1, 2 und 3 abzustammen (Wir sagen kurz: Z_i stammt von 0 ab). Mit M_i bezeichnen wir dasjenige Element aus $\{0,1,2,3\}$, von dem Z_i abstammt. Es folgt für $i \in \mathbb{N}$ und $k_1, \dots, k_{i+1} \in \{0,1,2,3\}$:

$$\mathbf{P}(M_{i+1} = k_{i+1} | M_1 = k_1, \dots, M_i = k_i) = \frac{1 + \#\{j | 1 \leq j \leq i \text{ und } M_j = k_{i+1}\}}{4+i}.$$

Dies können wir uns an einem Beispiel deutlich machen. Wird Z_1 an 1 angehängt (Z_1 stammt somit von 1 ab), so ist die Wahrscheinlichkeit, dass Z_2 von 1 abstammt gegeben mit $\frac{2}{5}$, da wir insgesamt 5 Knoten haben und wenn Z_2 an 1 oder Z_1 angehängt wird, Z_2 von 1 abstammt.
Für den ersten Knoten der angehängt wird gilt:

$$\mathbf{P}(M_1 = k) = \frac{1}{4}.$$

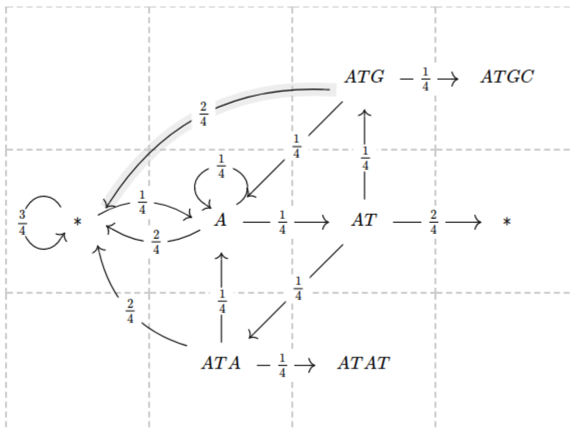
Die Übergangswahrscheinlichkeiten und die Wahrscheinlichkeit im ersten Schritt stimmen mit denen einer Polya-Urne mit 4 Farben überein (vergleiche V8b2). Somit können wir unser Problem umformulieren und Wissen über die Polya-Urne benutzen.
Es sei $X_{j,n}$ die Anzahl der Zugänge zu den Kugeln mit der Beschriftung j nach n Zügen mit $j = 0,1,2,3$. Da wir einen Baum mit 21 Knoten haben wollen, müssen wir 17 hinzufügen.
Es ist also $\mathbf{P}((X_{1,17}, X_{2,17}, X_{3,17}, X_{0,17}) = (2,4,7,4))$ gesucht.
Mit V8b2 folgt das unsere gesucht Wahrscheinlichkeit gegeben ist durch

$$\mathbf{P}((X_{1,17}, X_{2,17}, X_{3,17}, X_{0,17}) = (2,4,7,4)) = \frac{1}{\binom{17+4-1}{17}} = \frac{1}{\binom{20}{17}}.$$

b)

Wir kennen aus Aufgabe 6 b) ein Verfahren, rekursiv Permutationen in Zyklendarstellung zu konstruieren. Nun übertragen wir eben dieses Verfahren auf einen rekursiven Baum.
Die Permutation von 1 identifizieren wir trivialerweise mit dem Baum bestehend aus der Wurzel (diese nennen wir wieder 0) mit einer Tochter (1). Für den Knoten n, der rein zufällig angehängt wird (nachdem wir bereits $n-1$ Knoten rein zufällig angehängt haben), definieren wir folgende Übergangsdynamik.
Innerhalb der Zyklendarstellung setzen wir n rechts neben $i \in \{1, ..., n-1\}$, falls n Tochter von i wird. Es wird ein neuer Zyklus gegründet, falls n der Wurzel angehängt wird. Die in A6b) auftretende Zufallsvariable J entspricht somit der zufälligen Wahl der Mutter des Knotens n.
Unsere Voraussetzung, dass 1, 2 und 3 in verschiedenen Zyklen sind, ist äquivalent dazu, dass 1, 2 und 3 Kinder der Wurzel sind. Unter dieser Bedingung entspricht dann für $k = 1,2,3$ die Länge des Zyklus, der k enthält, der Anzahl der Knoten, die von k abstammen. Wir haben in Aufgabe N1 bereits gezeigt, dass die Bäume auf S_{n+1} uniform verteilt sind. Nun haben wir eine bijektive Abbildung zwischen Permutationen von n und rekursiven Bäumen mit $n+1$ Knoten konstruiert. Somit können wir schlussfolgern, dass das Ergebnis aus b) mit dem aus a) übereinstimmen muss.

34.S *Warten auf ein Muster.*
a)
Sei $w(x)$ die Wahrscheinlichkeit $ATAT$ vor $ATGC$ zu erreichen ausgehend vom Punkt x mit $x \in \{*, A, AT, ATA, ATG, ATGC, ATAT\}$. Logischerweise folgt, dass $w(ATAT) = 1$ und $w(ATGC) = 0$ sind.
Unser Graph sieht folgendermaßen aus:



Wir können dem Graphen durch Zerlegung nach dem ersten Schritt folgendes Gleichungssystem (wie in VL9a3) entnehmen und lösen:

$w(*) = \frac{3}{4}w(*) + \frac{1}{4}w(A) \Rightarrow w(*) = w(A)$

$w(A) = \frac{1}{4}w(A) + \frac{2}{4}w(*) + \frac{1}{4}w(AT) = \frac{3}{4}w(A) + \frac{1}{4}w(AT) \Rightarrow w(A) = w(AT)$

$w(AT) = \frac{1}{4}w(ATA) + \frac{1}{4}w(ATG) + \frac{2}{4}w(*) \underset{w(*)=w(AT)}{\Rightarrow} w(*) = \frac{1}{2}w(ATA) + \frac{1}{2}w(ATG)$

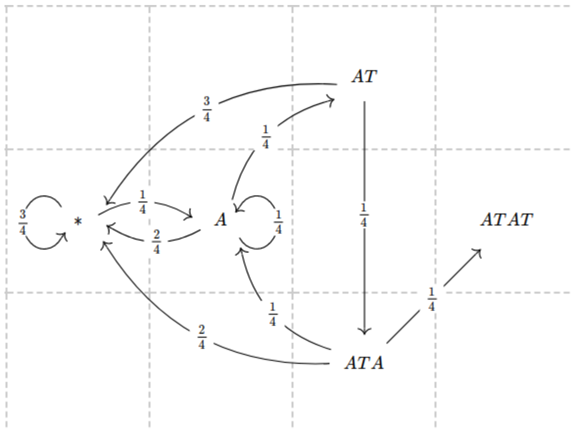
$w(ATG) = \frac{1}{4}w(A) + \frac{2}{4}w(*) + \frac{1}{4}w(ATGC) = \frac{3}{4}w(*)$

$w(ATA) = \frac{1}{4}w(A) + \frac{2}{4}w(*) + \frac{1}{4}w(ATAT) = \frac{3}{4}w(*) + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow w(*) = \frac{3}{8}w(*) + \frac{3}{8}w(*) + \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{2}{8}w(*) = \frac{1}{8} \Rightarrow w(*) = \frac{1}{2}$

Die gefragte Wahrscheinlichkeit beträgt also $\frac{1}{2}$.

b)
Wir können für diese Frage unseren Graphen reduzieren, d.h. er hat nun folgende Form:



Würden wir im ersten Graphen auf ATG kommen, so macht es bei dieser Frage keinen Unterschied ob wir bei ATG sind oder bei der Wurzel neu starten.
Es sei $e(x)$ $\forall x \in \{*, A, AT, ATA, ATAT\}$ die zu erwartende Anzahl an Schritten, die benötigt werden, um vom Zustand x nach $ATAT$ zu gelangen ($e(ATAT) = 0$). Mit dem Graphen können wir folgende Gleichungen aufstellen:

$e(*) = 1 + \frac{1}{4}e(A) + \frac{3}{4}e(*) \Rightarrow e(*) = 4 + e(A)$

$e(A) = 1 + \frac{1}{4}e(AT) + \frac{1}{4}e(A) + \frac{2}{4}e(*)$

$e(AT) = 1 + \frac{1}{4}e(ATA) + \frac{3}{4}e(*)$

$e(ATA) = 1 + \frac{1}{4}e(A) + \frac{2}{4}e(*) + \frac{1}{4}e(ATAT)$

Wichtig ist hier nicht die +1 zu vergessen, die in jeder Gleichung ist, da diese Gleichungen jeweils einen Schritt repräsentieren. Abgesehen davon ist das Aufstellen des LGS analog zu a).
Wir setzen die 4. in die 3. Gleichung:

$e(AT) = \frac{5}{4} + \frac{1}{16}e(A) + \frac{7}{8}e(*)$

Wir setzen diese Gleichung in die 2. Gleichung und anschließend in die 1. Gleichung:

$e(A) = \frac{21}{16} + \frac{17}{64}e(A) + \frac{23}{32}e(*) \Rightarrow e(A) = \frac{84}{47} + \frac{46}{47}e(*) \underset{\text{in die 1.Gleichung}}{\Rightarrow} e(*) = 4 + \frac{84}{47} + \frac{46}{47}e(*)$

$\Rightarrow e(*) = 272$

35. *Wie hoch kommt eine Irrfahrt mit negativer Drift?*
i)
Zunächst prüfen wir ob der Ansatz im Hinweis unsere Rekursionsgleichungen
$w(a) = \frac{2}{3}w(a-1)+\frac{1}{3}w(a+1)$ erfüllt, welche sich durch Zerlegung nach dem ersten Schritt ergeben.

$$\frac{2}{3}w(a-1) + \frac{1}{3}w(a+1) = \frac{2}{3}(c2^{a-1} + d) + \frac{1}{3}(c2^{a+1} + d)$$
$$= \frac{2}{3}c2^{a-1} + \frac{2}{3}d + \frac{1}{3}c2^{a+1} + \frac{1}{3}d = \frac{1}{3}c2^{a} + \frac{2}{3}c2^{a} + d = c2^{a} + d = w(a)$$

Wir können also den Ansatz $w(a) = c2^a + d$ für $-20 \leq a \leq 10$ machen. Erst müssen wir die passenden $c, d \in \mathbb{R}$ finden. Dies machen wir mit dem Wissen, dass $w(-20) = 0$ und $w(10) = 1$.
Es gilt also:

$$w(-20) = 0 = c2^{-20} + d \Rightarrow d = -c2^{-20}$$
$$w(10) = 1 = c(2^{10} - 2^{-20}) \Rightarrow c = \frac{1}{2^{10} - 2^{-20}}$$
$$\Rightarrow w(a) = \frac{2^a - 2^{-20}}{2^{10} - 2^{-20}}$$

ii)
Wir können den gleichen Ansatz wie bei der i) verwenden. Mit analogen Rechnungen kommen wir dann zu

$$w_l(a) = \frac{2^a - 2^{-l}}{2^{10} - 2^{-l}}$$

Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gegeben mit:

$$w_l(0) = \frac{1 - 2^{-l}}{2^{10} - 2^{-l}}$$

iii)
Betrachten wir nun $\lim\limits_{l\to\infty} w_l(0)$.

$$\lim_{l\to\infty} w_l(0) = \lim_{l\to\infty} \frac{1 - 2^{-l}}{2^{10} - 2^{-l}} = \frac{1}{2^{10}}$$

Dieser Wert gibt uns an wie Wahrscheinlich es ist, dass X die 10 trifft, bevor X nach $-\infty$ abdriftet.
Dementsprechend folgt die iv) durch das Berechnen der Gegenwahrscheinlichkeit.
Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $1 - 2^{-10}$.

v)
Zunächst können wir feststellen, dass unser Maximum (nennen wir es Max) den Werteberech $\mathbb{N}_0$ hat. Damit Max $\geq n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, müssen wir n erreichen, bevor wir nach $-\infty$ abdriften. Also machen wir den gleichen Ansatz wie bei der i), ii) und iii), ersetzen jedoch 10 durch ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$.
Wir wissen $w_l(n) = 1$ und $w_l(-l) = 0$ also können wir analog wieder die Zahlen c und d bestimmen und bekommen:

$$w_l(a) = \frac{2^a - 2^{-l}}{2^n - 2^{-l}} \Rightarrow \lim_{l \to \infty} w_l(a) = \frac{2^a}{2^n} = \frac{1}{2^{n-a}} \text{ für } a \leq n \text{ und } a \in \mathbb{Z}$$

Es folgt:

$$\lim_{l \to \infty} w_l(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Also gilt:

$$\mathbf{P}(\text{Max} \geq n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{P}(\text{Max} + 1 > n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Max + 1 ist also Geom($\frac{1}{2}$)-verteilt.

36.S *Irrfahrt auf einem ungerichteten Graphen.*
Gesucht ist eine reversibele Gleichgewichtsverteilung π zu der in der Aufgabe definierten Übergangsmatrix P, d.h. es muss $\forall a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$ $\pi(a)P(a, b) = \pi(b)P(b, a)$ gelten. Nun können wir folgende Gleichungen aufstellen:

$$\pi(1)P(1,2) = \pi(2)P(2,1) \Rightarrow \pi(1)\frac{c_{12}}{g(1)} = \pi(2)\frac{c_{12}}{g(2)} \Rightarrow \frac{\pi(1)}{g(1)} = \frac{\pi(2)}{g(2)}$$

$$\pi(1)P(1,3) = \pi(3)P(3,1) \Rightarrow \pi(1)\frac{c_{13}}{g(1)} = \pi(2)\frac{c_{13}}{g(3)} \Rightarrow \frac{\pi(1)}{g(1)} = \frac{\pi(3)}{g(3)}$$

$$\pi(1)P(1,4) = \pi(4)P(4,1) \Rightarrow \pi(1)\frac{c_{14}}{g(1)} = \pi(2)\frac{c_{14}}{g(4)} \Rightarrow \frac{\pi(1)}{g(1)} = \frac{\pi(4)}{g(4)}$$

Das Verhältnis zwischen $\pi(i)$ und $g(i)$ ist also konstant. Also muss gelten:

$$\pi(i) = cg(i) \text{ mit } c \in \mathbb{R} \text{ und } i = 1, 2, 3, 4$$

Um die $\pi(i)$ zu bestimmen müssen wir die Konstante c herausfinden. Dies machen wir mit dem Wissen, dass $1 = \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) + \pi(4)$ sein muss.

$$1 = cg(1) + cg(2) + cg(3) + cg(4) = c(g(1) + g(2) + g(3) + g(4))$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{g(1) + g(2) + g(3) + g(4)}.$$

Unsere Gleichgewichtsverteilung ist gegeben durch $\pi(i) = \frac{g(i)}{g(1)+g(2)+g(3)+g(4)}$ für $i = 1, 2, 3, 4$.